(mera je monotona) te sledi b).

c) Kako je za $c = 0$ tvrđenje očigledno tačno, pretpostavimo $c \neq 0$. Između skupa jednostavnih funkcija s sa osobinom $0 \leq s \leq f$ i skupa jednostavnih funkcija $\tilde{s}$ sa osobinom $0 \leq \tilde{s} \leq cf$ postoji bijekcija

$$0 \leq s \leq f, \quad s \mapsto \tilde{s} = cs, \;\; 0 \leq cs \leq cf.$$

Sledi da je

$$c \sup_{0 \leq s \leq f} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sup_{0 \leq cs \leq cf} \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

pa dobijamo tvrđenje c).

Tvrđenja d) i e) slede na osnovu definicije analizom nenegativnih jednostavnih funkcija sa osobinom $s(x) \leq f(x), x \in E$.

f) Važi da je $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \kappa_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\kappa_{A_i \cap E} + \kappa_{A_i \cap E^c})$, pa se u definiciji Lebegovog integrala $\int_E f d\mu$ supremum dostiže nad jednostavnim funkcijama oblika $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \kappa_{A_i \cap E}$. Sledi da je $\int_E f d\mu$ definisan supremumom integrala $\int_E s d\mu$ kada s prolazi skupom jednostavnih nenegativnih merljivih funkcija za koje važi $s(x) \leq f(x)$, $x \in E$, i $s(x) = 0$, $x \in E^c$. To je upravo skup jednostavnih funkcija koje minoriraju $\kappa_E f$ tj. skup funkcija $F = \{s; 0 \leq s \leq \kappa_E f\}$.

Dakle,

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu &= \sup_{0 \leq s \leq f,\, s|_{E^c} = 0} \int_E s d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f,\, s|_{E^c} = 0} \int_X s d\mu \\ &= \sup_{0 \leq s \leq \kappa_E f} \int_X s d\mu = \int_X \kappa_E f d\mu.\end{aligned}$$

■

Propozicija 4.1. Neka su $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \kappa_{A_i}$ i $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \kappa_{B_j}$ nenegativne merljive jednostavne funkcije na $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Neka je

$$\varphi_s(E) = \int_E s d\mu, \; E \in \mathcal{M}.$$

a) Tada je φ_s mera na $\mathcal{M}$.

b) $\int_E (s+t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu, \; E \in \mathcal{M}$.

Dokaz: a) Neka je $E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r, \; E_i \in \mathcal{M}, \; E_i \cap E_j = \emptyset, \; i, j \in \mathbf{N}$. Važi

$$\varphi_s(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_r)$$